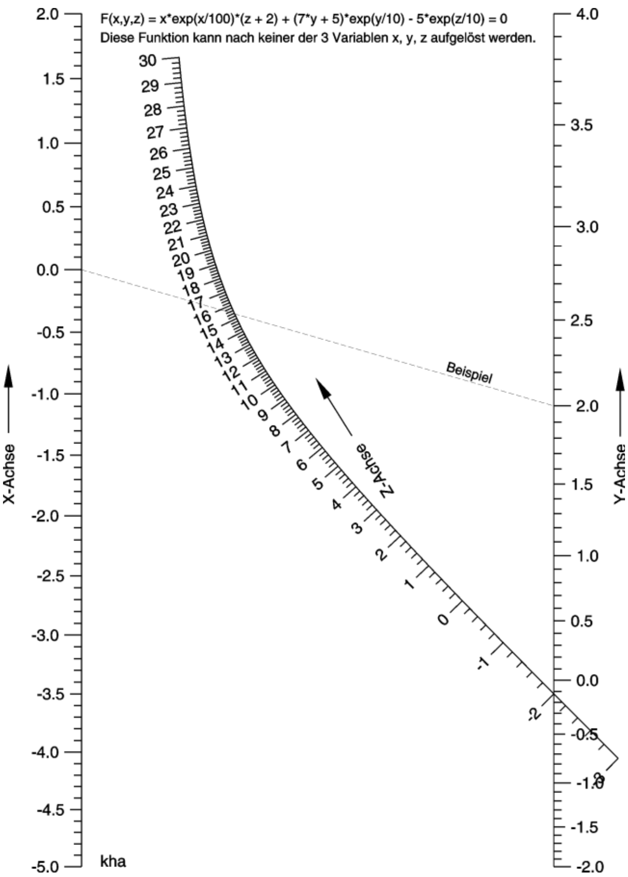
Programmierte Anleitung zum Erstellen von Nomogrammen

© Prof. Dr. Karl Haller · kha@karl-haller.de



Nomogramme kontra PC?

Nomogramme – auch Leitertafeln genannt – sind einfach zu handhabende grafische Hilfsmittel zur Bestimmung einer Veränderlichen einer Funktion F(x, y, z) = 0. Dabei spielt es keine Rolle, ob x, y oder z gesucht wird. Damit lassen sich auch Probleme lösen, für die sonst iterative Computerberechnungen notwendig wären. In der Betriebspraxis haben Nomogramme den bemerkenswerten Vorteil, dass auch mathematisch unbelastete Mitarbeiter "Berechnungen" sicher durchführen können. Andererseits können Computerprogramme den früher großen Aufwand für die Nomogrammerstellung drastisch reduzieren. PostScript bietet sich für die Berechnung und die "Reinzeichnung" an.

Mit der folgenden Anleitung (die auch direkt in eine beliebige Programmiersprache umgesetzt werden kann) können Nomogramme immer dann entwickelt werden, wenn sich die Ausgangsformel in die sogenannte

Schlüsselgleichung

$$F(x)\cdot f_1(z)+F(y)+f_2(z)=0$$

umformen läßt. Die Erfahrung zeigt, dass die Umformung in praktischen Fällen immer möglich ist.

In der Teilfunktion *F(x)* der Schlüsselgleichung darf nur *x* vorkommen, nicht aber *y* und *z*. Analoges gilt für die anderen Teilfunktionen, in denen nur *y* bzw. *z* vorkommen dürfen. Wenn $f_1(z)$ nicht existiert, ist formal $f_1(z)$ = 1 zu setzen; wenn $f_2(z)$ nicht existiert, ist formal $f_2(z)$ = 0 zu setzen. Wenn $f_1(z)$ und $f_2(z)$ *echte* Funktionen von *z* sind, wird die z-Skala eine gekrümmte Linie. Wenn $f_2(z)$ existiert und $f_1(z)$ dagegen nicht, wird die z-Skala eine parallele Gerade. Wenn $f_1(z)$ existiert und $f_2(z)$ dagegen nicht, wird die z-Skala eine schrägliegende Gerade.

Da es praktisch immer mehrere Umformmöglichkeiten gibt, erhält man für die gleiche Ausgangsformel verschiedene Nomogramme, die zwar alle richtig sind, sich aber im darstellbaren Wertebereich und in der Ablesegenauigkeit erheblich unterscheiden können. Wenn in der Ausgangsformel *f2(z)* fehlt, ist diese Formel vom Grundtypus C = A·B oder C = A / B. In diesem Fall kann man durch Logarithmieren oder Potenzieren der Ausgangsformel eine weitere Vielfalt erreichen und zur Optimierung benutzen.

Das oben dargestellte Beispiel

$$F(x,y,z)=x\cdot e^{x/100}\cdot(z+2)+(7y+5)\cdot e^{y/10}-5\cdot e^{z/10}=0$$

$$\mathbf{F(x)}\cdot f_1(z)+\mathbf{F(y)}\quad +f_2(z)=0$$

ist zwar genau auf den Aufbau der Schlüsselgleichung hin "konstruiert", es zeigt aber die Leistungsfähigkeit der Nomografie: Diese Funktion ist weder nach x, noch nach y, noch nach z auflösbar. Wie man sieht, kann man dennoch ein Nomogramm erstellen und Lösungen in einfacher Weise bestimmen.

Ein reales Beispiel aus der Druck- und Medientechnik, die Murray-Davies-Formel:

$$\varphi=\frac{1-10^{-D_R}}{1-10^{-D_V}}$$ mit φ = Flächendeckungsgrad, D_R und D_V = Farbdichten im Rasterton bzw. Vollton

Eine zweckmäßige Umformung:

$$(1-10^{-D_V})\cdot\varphi-(1-10^{-D_R})=0$$

Da $f_2(z)$ nicht existiert, wird formal $f_2(z)$ = 0 zugefügt:

$$(1-10^{-D_V})\cdot\varphi-(1-10^{-D_R})+0=0$$

Somit: $F(x)=(1-10^{-x})$ $\quad x = D_V$

$F(y)=-(1-10^{-y})$ $\quad y = D_R$

$f_1(z)=z$ $\quad z=\varphi$

$f_2(z)=0$ (formal)

Diese Lösung bietet den gewünschten Werteumfang und eine hohe Ablesegenauigkeit.

Auch richtige Umformung, aber nicht zweckmäßig:

$$\lg(1-10^{-D_v})-\lg(1-10^{-D_R})+\lg\varphi=0$$

Da $f_1(z)$ nicht existiert, wird formal $f_1(z)$ = 1 zugefügt:

$$\lg(1-10^{-D_v})\cdot 1-\lg(1-10^{-D_R})+\lg\varphi=0$$

Somit: $F(x)=\lg(1-10^{-x})$ $\quad x = D_V$

$F(y)=-\lg(1-10^{-y})$ $\quad y = D_R$

$f_1(z)=1$ (formal)

$f_2(z)=\lg z$ $\quad z=\varphi$

Der Nachteil dieser Lösung: D_R, D_V und φ dürfen nicht gegen 0 gehen, da sonst lg gegen -∞.

Programmierte Anleitung zum Erstellen von Nomogrammen

© Prof. Dr. Karl Haller, kha@karl-haller.de 70140807

Ausgangsformel:

$Variable_1$ = $Variable_2$ = $Variable_3$ =

Ausgangsgleichung in Schlüsselgleichung umformen, immer mehrere Lösungen möglich.

Schlüsselgleichung:

F(x)	·	$f_1(z)$	+	F(y)	+	$f_2(z)$	=	0
	·		+		+		=	0

Wenn $f_1(z)$ fehlt, ist formal $f_1(z) = 1$ zu setzen. Wenn $f_2(z)$ fehlt, ist formal $f_2(z) = 0$ zu setzen.

x_{min} =		$F(x_{min})$ =	
x_{max} =		$F(x_{max})$ =	
G_{01} = *Max* von F(x) =		Vorzeichen beachten	
G_{02} = *Min* von F(x) =			
$G_{03} = G_{01} - G_{02}$ =			

y_{min} =		$F(y_{min})$ =	
y_{max} =		$F(y_{max})$ =	
G_{04} = *Max* von F(y) =		Vorzeichen beachten	
G_{05} = *Min* von F(y) =			
$G_{06} = G_{04} - G_{05}$ =			

Min und *Max* sind Minimal- und Maximalwerte im mathematischen Sinne, z.B. ist –6 kleiner als –5.

$G_{07} = G_{03} / G_{06}$ =		/		=	
G_{08} =		= a = Länge der x-/y-Skala			
G_{09} =		= c = Abstand x-/y-Skala			
$G_{10} = G_{08} / G_{09}$ =		/		=	
$G_{11} = G_{10}^2$ =					

Vorschlag für DIN A4 hoch	Vorschlag für DIN A4 quer
G_{08} = 225 mm	G_{08} = 125 mm
G_{09} = 125 mm	G_{09} = 225 mm
G_{10} = 1,8	G_{10} = 0,55555
G_{11} = 3,24	G_{11} = 0,30864

1. x-Skala, Koordinaten k_x

$k_x = (G_{08} / G_{03}) \cdot [F(x) - G_{02}] = (\quad / \quad) \cdot [\quad - \quad]$

$k_x = f(x) =$

2. y-Skala, Koordinaten k_y

$k_y = (G_{08} / G_{06}) \cdot [F(y) - G_{05}] = (\quad / \quad) \cdot [\quad - \quad]$

$k_y = f(y) =$

3.1 z-Skala, allgemeiner Fall: $f_2(z) \neq 0$, Koordinaten U_z und V_z Bei $f_2(z) = 0$ praktischer nach Fall 3.2 rechnen

$$U_z = G_{09} \cdot \frac{1}{1 + G_{07} \cdot f_1(z)} = \quad \cdot \frac{1}{1 + \quad \cdot \quad}$$

$U_z = f(z) =$

$$V_z = -G_{08} \cdot \left[\frac{G_{05} + G_{02} \cdot f_1(z) + f_2(z)}{G_{06} + G_{03} \cdot f_1(z)} \right] = - \quad \cdot \left[\frac{\quad + \quad \cdot \quad + \quad}{\quad + \quad \cdot \quad} \right]$$

$V_z = f(z) =$

Hinweise: Wenn $f_1(z)$ = constant, dann wird U_z = konstant und damit die z-Skala eine parallele Gerade. Wenn V_z eine Linearkombination von U_z ist, dann wird die z-Skala eine schrägliegende Gerade. In allen anderen Fällen wird die z-Skala eine gekrümmte Linie.

3.2 z-Skala, spezieller Fall: $f_2(z) = 0$, Koordinaten k_z der z-Skala und Durchstoßpunkte A_z, B_z

$G_{12} = G_{02} / G_{03} =$ ____ / ____ = ____

$G_{13} = G_{05} / G_{06} =$ ____ / ____ = ____ Vorzeichen beachten

$G_{14} = G_{12} - G_{13}$ = ____

Hinweis: Wenn $G_{14} = 0$, kann nicht mit Fall 3.2 weitergerechnet werden. In diesem Fall liegt die z-Skala waagrecht, was im Normalfall nicht sehr praktisch ist, siehe Skizze unten. Die Koordinaten $U_z = f(z)$ und V_z = constant und können aber nach Fall 3.1 berechnet werden. Die Situation $G_{14} = 0$ kann vermieden werden durch: Ändern der Grenzwerte x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max} oder durch Vorzeichentausch in der Schlüsselgleichung.

$G_{15} = G_{14}^2 =$ ____

$G_{16} = G_{12} / G_{14} =$ ____ / ____ = ____

$G_{17} = (1 + G_{12}) / G_{14} = (1$ + ____) / ____ = ____

$G_{18} = 1 + G_{11} \cdot G_{15} = (1$ + ____ · ____) = ____

$G_{19} = \sqrt{G_{18}} =$ ____ √ = Wurzel

$G_{20} = G_{09} \cdot G_{19} =$ ____ · ____ = ____

$G_{21} = \mathbf{A_z} = G_{09} \cdot G_{16}$ = ____ · ____ = ____

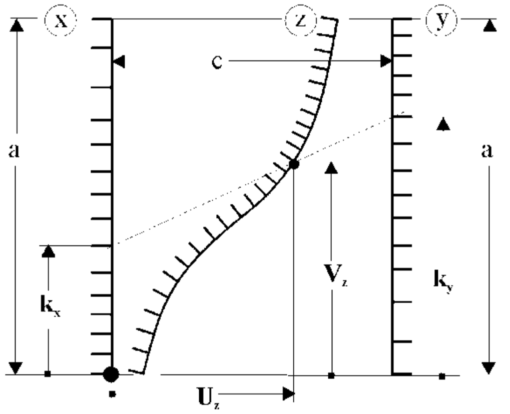
$G_{22} = \mathbf{B_z} = G_{09} \cdot G_{17}$ = ____ · ____ = ____

$G_{23} = \tan\alpha = G_{10} \cdot G_{14}$ = ____ · ____ = ____

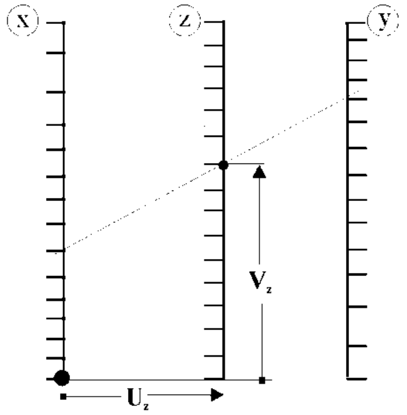
$$k_z = G_{20} \cdot \left[\frac{1}{1 + G_{07} \cdot f_1(z)} - G_{16} \right] = \_\_\_\_ \cdot \left[\frac{1}{1 + \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_} - \_\_\_\_ \right]$$

$k_z = f(z) =$

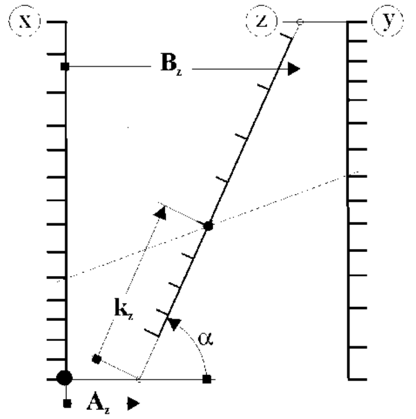
Fall 3.1: $f_2(z) \neq 0$



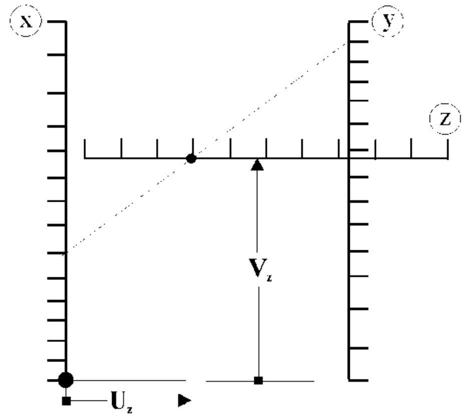
Fall 3.1a: $f_2(z) \neq 0$, $f_1(z)$ = constant



Fall 3.2: $f_2(z) = 0$



Fall 3.2a: $f_2(z) = 0$, $G_{14} = 0$: U_z und V_z nach 3.1



Wenn eine Formel vorzugsweise nach einer Größe aufgelöst wird, empfiehlt es sich diese Größe, wenn möglich, auf die z-Skala zu legen, da diese Skala in der Regel zwischen der x- und der y-Skala zu liegen kommt. Die gegebenen Größen x und y liegen dann außen, die gesuchte Größe z innen.

4. Koordinaten berechnen und Nomogramm zeichnen

$x = x_{min} \ldots x_{max}$ $\quad$ $k_x = \ldots\ldots$
$y = y_{min} \ldots y_{max}$, $\quad$ $k_y = \ldots\ldots$
$z = z_{min} \ldots z_{max}$, $\quad$ $k_z = \ldots\ldots$ (Fall 3.2) bzw. $U_z = \ldots\ldots$, $V_z = \ldots\ldots$ (Fall 3.1)

Das Ausgabesystem kann gewisse Abweichungen von der 1:1-mm-Skalierung des Vordrucks verursachen. Maßgebend sind dennoch die gedruckten Koordinaten.
Für präzise Ausführung und professionelles Aussehen wird empfohlen, die Berechnung und Zeichnung komplett in PostScript auszuführen.

Nomogrammvordruck für a = 225 mm und c = 125 mm. Für manuelles Zeichnen.